



TITLE:

# ニュートンの13球問題: 初等的な証明(群論とその周辺)

AUTHOR(S):

前原, 潤

---

CITATION:

前原, 潤. ニュートンの13球問題: 初等的な証明(群論とその周辺). 数理解析研究所講究録 2007, 1564: 162-171

ISSUE DATE:

2007-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/81132>

RIGHT:

## ニュートンの 13 球問題

### — 初等的な証明 —

琉球大学・教育学部 前原 潤 (Hiroshi Maehara)

Faculty of Education, University of the Ryukyus

1 つの単位球に、同時にいくつの単位球が接することができるか？もちろん、単位球どうしは交差する（2 つ以上の点を共有する）ことはできない。この問題は 1694 年に、D. Gregory と A. Newton の間で議論されたと伝えられているもので、Newton の 13 球問題、Newton-Gregory 問題、あるいは単に、13 球問題などと呼ばれている。

**定理 1.** 1 つの単位球に同時に接することができる単位球の個数の最大値は 12 である。

この定理は 1953 年の Schütte と van der Waerden の論文 [16] で初めて厳密に証明されたといわれている。1956 年に J. Leech は 2 ページの証明 [8] を出しているが、これは省略が多すぎて完全に理解するのは難しい。2001 年以降、Newton の 13 球問題については、新たな証明や関連する論文・記事が次々と表れ [1-5, 7, 11, 14, 15], O. R. Musin による 4 次元の kissing number の決定 [13] も相まって、13 球問題への関心は再燃したように見える。

ここでは、上の定理（と同値な定理）を、概ね [12] に沿って、学部学生にも理解できるように初等的に証明する。また、このノートだけで完結するように、必要な公式、補題等もすべて証明する。

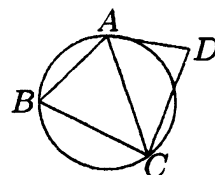
### 1 定義・記号

3 次元空間内の原点  $O$  を中心とする単位球面を  $S$  で表す。 $O$  を通る平面で  $S$  を切ったときの切り口の円を大円という。大円の劣弧を単に辺と呼ぶ。 $S$  上の領域  $W$  は、その中のどの 2 点も  $W$  内を通る辺で結ぶことができるとき、凸領域と呼ぶ。 $S$  上の 3 つの辺  $AB, BC, CA$  で囲まれた凸領域を（球面上の）三角形といい、 $ABC$  で表す。（以下、図形は、断りがない限り、球面上の図形を意味する。）3 辺の長さが  $x, y, z$  の三角形は記号

$\Delta(x, y, z)$  で表す。 $S$  上の三角形  $ABC$  に対して、3 点  $A, B, C$  を通る平面で  $S$  を 2 つに分けたとき、三角形  $ABC$  を含む方の側を  $ABC$  の外接  $\text{cap}$  といい、記号  $\text{cap}(ABC)$  で表す。外接  $\text{cap}$  の中心は  $\text{cap}$  上の点であり、中心と  $\text{cap}$  の縁を結ぶ辺の長さが  $\text{cap}$  の半径である。三角形  $ABC$  は  $\text{cap}(ABC)$  の中心を含むとき、**優三角形**であるという。

$S$  上の互いに交差しない 4 つの辺で囲まれた (凸とは限らない) 領域を**四辺形**という。4 つの辺  $AB, BC, CD, DA$  で囲まれた四辺形は  $ABCD$  で表す。三角形や四辺形の面積は、 $|ABC|, |\Delta(x, y, z)|$  や  $|ABCD|$  のように、絶対値記号をつけて表す。点  $P \in S$  の対心点 ( $O$  に関して  $P$  と対称な点) を  $P^*$  で表す。

2 つの三角形  $ABC$  と  $ACD$  の和となる四辺形  $ABCD$  で、 $D$  が  $\text{cap}(ABC)$  の内点でないとき (右図を参照)、 $AC$  を四辺形  $ABCD$  の**固有対角線**という。



## 2 証明に用いる公式と補題

以下の公式、補題等の証明は 4 節以降で述べる。

- 面積公式** :  $|ABC| = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$ .
- 余弦公式** :  $\theta$  を  $\Delta(x, y, z)$  の辺  $z$  の対角とすると、 $\cos z = \cos x \cos y + \sin x \sin y \cos \theta$ .

2 辺の長さ  $x, y$  を固定するとき、 $\sin x \sin y > 0$  であるから、 $\cos z$  が増加すると  $\cos \theta$  が増加する。ゆえに、

- 系** 2 辺の長さ  $x, y$  を固定するとき、角  $\theta$  は対辺  $z$  の単調増加関数である。□
- トートの補題** [6] 三角形  $ABC$  の最小辺の長さを  $d$  とするとき、 $\text{cap}(ABC)$  の半径が  $d$  より小さいなら  $|ABC| \geq |\Delta(d, d, d)|$  である。
- 固有対角線補題** [9,3] 四辺形を、各辺の長さを変えずに変形して、固有対角線の長さを短くすると、四辺形の面積は減少する。

$ABC$  が優三角形のとき、平面  $ACO$  に関して、 $ABC$  と対称な三角形を  $AB'C$  とすると、 $AC$  は、2 つの三角形の和である四辺形  $ABCB'$  の固有対角線で、 $|ABC| = |ABCB'|/2$  である。従って、 $AB, BC$  の長さを変えずに  $AC$  を短くすると、 $ABC$  の面積は減少することがわかる。

- 系** 優三角形では、1 辺だけを縮めると面積が減少する。□

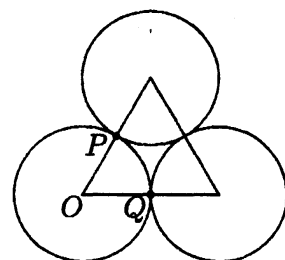
点  $P$  が  $\text{cap}(ABC)$  の中心のとき、半直線  $\overrightarrow{OP}$  と平面  $ABC$  の交点は平面三角形  $ABC$  の外接円の中心である。ゆえに、 $ABC$  が優三角形であるための必要十分条件は、平面三角

形  $ABC$  が鈍角三角形ではないことである。例えば、三角形  $ABC$  の各辺の長さが  $\pi/3$  以上、 $\pi/2$  以下のとき、平面三角形  $ABC$  の各辺の長さは 1 以上、 $\sqrt{2}$  以下となる。この場合、2つの辺の2乗の和は残りの1辺の2乗より小さくないから、平面三角形  $ABC$  は鈍角三角形ではないことがわかる。従って、

- $x, y, z \in [\pi/3, \pi/2]$  のとき  $\Delta(x, y, z)$  は優三角形である。 □
- 同様に、 $x, y \in [\pi/3, 2\pi/3]$  のとき  $\Delta(x, y, \pi/2)$  は優三角形である。 □

### 3 証明

$S$  上の点集合で、どの2点間の球面距離も  $d$  以上となる点集合は  $d$  分離であるという。 $S$  上の2点  $P, Q$  に対して、2つの単位球がそれぞれ、点  $P, Q$  で同時に  $S$  に接することができるための必要十分条件は、(右図から)  $\angle POQ \geq \pi/3$  である。



従って、定理1は次の定理と同値である。

**定理 2.**  $S$  上の  $\pi/3$  分離点集合が含む点の個数の最大値は 12 である。

この定理を証明する。まず、記号  $a, b, \delta$  を次のように定める。

$$a := \pi/3, \quad b := \arccos(1/7) \approx 1.427, \quad \delta := |\Delta(a, a, a)|.$$

余弦公式と面積公式を用い、計算機で面積を計算すると、

$$\begin{aligned} \delta &\approx 0.551, & |\Delta(a, a, b)| &\approx 0.667, & |\Delta(a, b, b)| &\approx 0.892, \\ |\Delta(b, b, b)| &\approx 1.194, & |\Delta(a, \pi/2, \pi/2)| &\approx 1.047, & |\Delta(a, a, \pi/2)| &\approx 0.679 \end{aligned}$$

となる。 $S$  に内接する正 20 面体の各面を、 $O$  から  $S$  上に射影して、 $S$  を 20 個の“正三角形”に分ける。各正三角形の面積は  $4\pi/20 = 0.6283\dots$  である。これは  $\delta$  より大きいから、正 20 面体の頂点間の球面距離は  $a = \pi/3$  より大きいことがわかる。よって、 $S$  に内接する正 20 面体の 12 個の頂点は  $\pi/3$  分離である。従って、定理 2 を示すには、 $S$  上に 13 個以上の点からなる  $\pi/3$  分離点集合は存在しないことを言えばよい。

$\mathcal{X}$  を  $S$  上の  $\pi/3$  分離点集合で最も多くの点を含む集合とし、 $\mathcal{X}$  の点の個数を  $n$  とする。すると、 $\mathcal{X}$  の凸包 ( $\mathcal{X}$  を頂点集合とする凸多面体)  $\Gamma(\mathcal{X})$  は  $S$  の中心を含む。(さもないと、点を追加して、 $\mathcal{X}$  をもっと大きくできる。)  $\Gamma(\mathcal{X})$  の各辺を、点  $O$  から  $S$  上に射影して、 $S$  を多角形に分割し、必要なら対角線を加えて球面  $S$  を三角形に分割するグラフ (網

目)  $G$  を描く。 $G$  の三角形の個数を  $t$  とすると、 $S$  の面積は  $t$  個の三角形の面積の和である。従って、 $4\pi = (G \text{ の三角形のすべての内角の和}) - \pi t = 2\pi n - \pi t$  となる。よって、

1°  $G$  の三角形の個数は  $2n - 4$  である。

また、 $\Gamma(\mathcal{X})$  は各三角形の決定する平面の  $O$  の側にあるから、

2°  $G$  の各三角形の外接 cap の内部に  $G$  の頂点は現れない。

3° 従って、 $G$  の各辺はその両側の三角形を合わせた四辺形の固有対角線である。

4°  $G$  のどの三角形の外接 cap の半径も  $a$  より小さい。(さもないと、 $\mathcal{X}$  をもっと大きくできる。) 従って、 $G$  の各辺は  $2a = 2\pi/3$  より短い。

トートの補題と 4° より、 $G$  の各三角形の面積は  $\delta = |\Delta(a, a, a)|$  以上である。すると、 $2n - 4 \leq 4\pi/\delta \approx 22.8$  であるから、 $n \leq 13$  となる。従って、 $n \neq 13$  となることを証明すればよい。 $n \neq 13$  の証明は背理法による。

以下、 $n = 13$  と仮定する。

**補題 1.**  $G$  には長さが  $b$  以上の辺はたかだか 1 本しか存在しない。

**証明**  $n = 13$  と 1° より、 $G$  には 22 個の三角形がある。 $G$  の最長辺を、三角形  $ABC, ACD$  の共有辺  $AC$  とし、 $AC$  の次に長い  $G$  の辺 (および、その辺長) を  $e$  とする。

(i) まず  $e > \pi/2$  と仮定せよ。 $ABCD$  の各辺の長さを変えずに、対角線  $AC$  の長さを  $\pi/2$  に縮めると  $|ABCD|$  は減少し、 $G$  の各辺の長さは  $\pi/3$  以上、 $2\pi/3$  未満だから、 $ABC, ACD$  はいずれも優三角形となる。辺  $e$  が  $ABCD$  の 1 辺なら、

$$|ABCD| > |\Delta(a, \pi/2, \pi/2)| + \delta \approx 1.0472 + 0.5513$$

となり、 $4\pi > 21\delta + 1.0472 \approx 12.624 > 4\pi$  で、矛盾が生ずる。辺  $e$  が  $ABCD$  の辺でなければ  $|ABCD| > 2|\Delta(a, a, \pi/2)| \approx 1.359$  であり、同様に、辺  $e$  の両側の三角形の面積の和も  $2|\Delta(a, a, \pi/2)|$  以上となる。従って  $4\pi > (22 - 4)\delta + 2 \times 1.359 \approx 12.642 > 4\pi$  で、やはり矛盾が生ずる。故に  $e \leq \pi/2$  である。

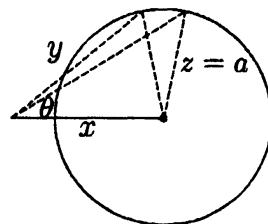
(ii)  $b \leq e \leq \pi/2$  と仮定せよ。すると  $ABC, ACD$  以外の三角形は優三角形である。辺  $e$  が  $ABCD$  の 1 辺なら、 $|ABCD| > |\Delta(a, b, b)| + |\Delta(a, a, b)|$  であり、他にも  $e$  を 1 辺とする三角形があるから、

$$4\pi \geq (22 - 3)\delta + 2|\Delta(a, a, b)| + |\Delta(a, b, b)| \approx 12.701 > 4\pi$$

となり、矛盾。辺  $e$  が  $ABCD$  の辺でなければ  $e$  の両側の三角形の面積は  $|\Delta(a, a, b)|$  以上であるから、 $4\pi \geq (22-4)\delta + 4|\Delta(a, a, b)| \approx 12.59 > 4\pi$  となり、やはり矛盾が生ずる。従って  $e < b$  である。つまり、 $G$  に長さ  $b$  以上の辺は 2 本以上存在しない。□

**補題 2.**  $\Delta(x, y, z)$  の辺  $z$  の対角を  $\theta = \theta(x, y, z)$  とする。このとき、 $x, y, z \in [a, b]$  なら  $\theta > \pi/3$  である。

**証明** 余弦公式の系により、 $\theta(x, y, z) \geq \theta(x, y, a)$  である。右図より、 $x$  を固定したとき、 $\theta(x, y, a) \geq \min\{\theta(x, a, a), \theta(x, b, a)\}$  であることがわかる。同様に、 $y$  の値を  $a$  と  $b$  に固定して考えると  $\theta(x, y, z) \geq \min\{\theta(a, a, a), \theta(a, b, a), \theta(b, b, a)\}$  となることがわかる。 $\theta(a, a, a) = \cos^{-1}(1/3)$ ,  $\theta(a, b, a) = \pi/3$ ,  $\theta(b, b, a) = \cos^{-1}(47/96)$  で、最小値は  $\theta(a, b, a) = \pi/3$  である。従って、 $\theta(x, y, z) \geq \pi/3$  であるが、 $x, y$  は  $b$  より小さいから、 $\theta(x, y, z) \neq \pi/3$  である。□



さて、 $G$  に長さが  $b$  以上の辺が 1 本もないとすると、補題 2 により、 $G$  の各頂点からは辺が高々 5 本しか出ない。つまり、 $G$  の各頂点の次数は 5 以下である。ところが、頂点の次数の合計は辺数の 2 倍に等しく、辺数の 2 倍は  $22 \times 3 = 66$  であるから、頂点の平均次数は  $66/13 > 5$  となり、矛盾が生ずる。従って、 $G$  には長さ  $b$  以上の辺がちょうど 1 本あることになる。 $G$  から長さが  $b$  以上の辺を除いて得られるグラフを  $G_1$  とする。 $G_1$  の各頂点の次数は 5 以下である。

(1)  $G_1$  の辺数は 32 で、 $G_1$  の面は四辺形が 1 個と三角形が 20 個である。

$G_1$  の頂点の次数の総和は 64 となるから、

(2)  $G_1$  には次数 4 の頂点が 1 個、次数 5 の頂点が 12 個ある。

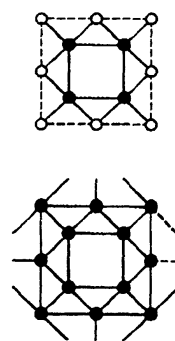
グラフ  $G_1$  の 3 つの辺が閉曲線をなすとき、この 3 つの辺を  $G_1$  の 3 サイクルという。 $x, y, z \in [a, b]$  なら、 $\Delta(x, y, z)$  は優三角形だから、 $G_1$  の 3 サイクルのなす三角形の面積は  $|\Delta(b, b, b)|$  より小さい。 $3\delta > |\Delta(b, b, b)|$  であるから、3 サイクルのなす三角形は他の頂点を含むことはできない。従って、

(3)  $G_1$  には三角形の面の周以外の 3 サイクルは存在しない。

どの 2 辺も交差しないような球面上のグラフで、条件 (1)(2)(3) を満たすものが存在するか？もし存在するなら、(球面上のグラフは立体射影で平面上に写すことができるから) 平面上にもそのようなグラフを描くことができるはずである。平面上で、四辺形から出発して、条件 (1)(2)(3) を満たすような平面グラフを描くことを、2 つの場合に分けて試みる。

(i) 四辺形の頂点の次数がすべて5の場合。

(右図上を参照して) 四辺形の各頂点●から、外側に3本ずつ辺が出る。その端点○と●は(3)により、すべて異なる。また、○同士も(2)によりすべて異なる。すると、右図下のようになり、外側の8頂点から、さらに11本の辺が外部に向かって出る。これらの辺は(2)によりすべて異なることがわかる。すると、辺数が32を超えてしまう。従って、この場合は不可能である。



(ii) 四辺形の頂点に次数4の頂点がある場合。

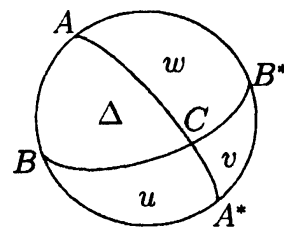
この場合も、(1)(2)(3)を満たす平面グラフを描くことはできないことが(i)と同様にして確かめられる。ゆえに、(1)(2)(3)を満たす $S$ 上のグラフ $G_1$ は存在せず、 $n = 13$ とすると矛盾することがわかった。証明終わり。

## 4 面積公式・余弦公式

$S$ 上の点 $P$ とその対心点 $P^*$ を結ぶ2つの大円弧で囲まれた領域を月形と呼ぶ。月形の頂点 $P$ での内角を $\theta$ とすると、月形の面積は、明らかに $4\pi \times (\theta/2\pi) = 2\theta$ に等しい。

**面積公式：**  $|ABC| = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$ .

**証明**  $A, B, C$ の対心点を $A^*, B^*, C^*$ として、右図のように4つの三角形の面積を $\Delta, u, v, w$ で表す。 $CA^*B^*$ と $C^*AB$ は $S$ の中心 $O$ に関して対称だから、 $\Delta + v$ は月形 $CAC^*B$ の面積 $2\angle C$ に等しい。従って、 $(\Delta + u) + (\Delta + v) + (\Delta + w) = 3\Delta + u + v + w$ は3つの月形の面積の和 $2\angle A + 2\angle C + 2\angle B$ に等しい。 $\Delta + u + v + w$ は $S$ の面積の半分 $2\pi$ に等しいから、 $2\Delta + 2\pi = 2(\angle A + \angle B + \angle C)$ となり、面積公式が得られる。□



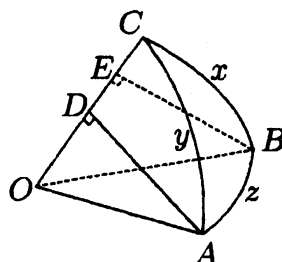
**余弦公式：** 三角形 $ABC$ の頂点 $A, B, C$ の対辺を $x, y, z$ とすると、

$$\cos z = \cos x \cos y + \sin x \sin y \cos \angle C.$$

**証明** 頂点 $A, B$ から直線 $OC$ に下ろした垂線の足をそれぞれ、 $D, E$ とする(右図)。このとき、2つのベクトル $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{EB}$ のなす角は $\angle C$ に等しい。 $DA = \sin y, EB = \sin x$ であるから、

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EB} = \sin x \sin y \cos \angle C.$$

また、 $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OA} - \cos y \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{OB} - \cos x \overrightarrow{OC}$ であるから、

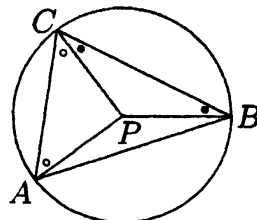


$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EB} = (\overrightarrow{OA} - \cos y \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \cos x \overrightarrow{OC}).$$

右辺を計算すると  $\cos z - \cos x \cos y$  となるから,  $\cos z - \cos x \cos y = \sin x \sin y \cos \angle C$ .  $\square$

## 5 トートの補題

円周角定理 [7,9,10]  $ABC$  の外接 cap の中心を  $P$  とすると  $\angle C - (\angle A + \angle B) = \pm 2\angle PAB$  が成立する。符号は,  $\widehat{ACB}$  が優弧なら  $(-)$ , 劣弧なら  $(+)$  である。従って,  $X \in \widehat{ACB}$  のとき,  $\angle AXB - (\angle XAB + \angle XBA) = \text{一定}$  である。



証明 図からほぼ明らかであろう。(もちろん, 三角形  $ABC$  が  $P$  を含まない場合も考えなければならない。)  $\square$

系 1.  $\widehat{ACB}$  が優弧 (半円)  $\iff \angle C < \angle A + \angle B$  ( $\angle C = \angle A + \angle B$ ).  $\square$

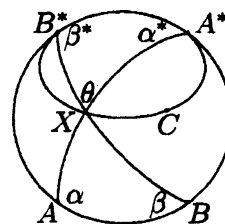
レクセルの定理 (A.J.Lexell 1784)  $X \in \widehat{A^*CB^*} \Rightarrow |ABX| = |ABC|$ .

証明 [10] 右図を参考にして,

$$X \in \widehat{A^*CB^*} \Rightarrow \theta - \alpha^* - \beta^* = \text{一定}$$

$$\Rightarrow \theta - (\pi - \alpha) - (\pi - \beta) = \text{一定} \Rightarrow \theta + \alpha + \beta - \pi = \text{一定}$$

ゆえに  $|ABX| = |ABC|$  である。  $\square$

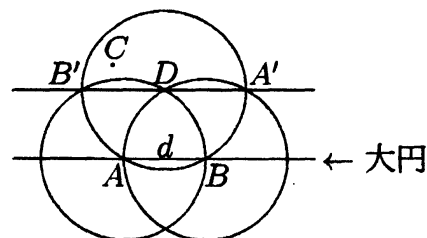


系 2.  $A, B$  を固定したとき,  $\widehat{A^*CB^*}$  が短いほど  $|ABC|$  は大きい。  $\square$

この系により, 点  $X$  が大円  $ABA^*B^*$  に関して  $C$  と同じ側にあるとき, レクセルの定理の逆も成立することがわかる。

トートの補題  $ABC$  の最短辺  $AB$  の長さが  $d$  のとき,  $\text{cap}(ABC)$  の半径が  $d$  より小さいなら,  $|ABC| \geq |\Delta(d, d, d)|$  である。

証明 (右図を参考にして)  $A, B$  を中心として半径  $d$  の円を描き, 大円  $AB$  に関して  $C$  と同じ側にある交点を  $D$  とする。  $D$  を中心として半径  $d$  の円を描く。図のように交点に名前をつける。  $\text{cap}(ABC)$  の半径が  $d$  より小さいから, 点  $C$  は  $\text{cap}D$  の内部にある。また,



$|ABD| = |ABA'D|/2 = |ABA'| = |ABB'|$  であるから,  $\widehat{A'DB'} \subset \widehat{A^*DB^*}$  となる。故に,  $C$  は  $\text{cap}(A^*DB^*)$  に含まれ,  $|ABC| \geq |ABD|$  である。  $\square$

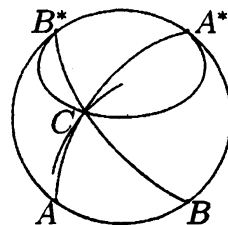


## 6 固有対角線補題

補題 3.  $\widehat{ABC}$  が優弧のとき, 三角形  $ABC$  の辺  $AC$  を縮めると  $ABC$  の面積が減少する。  
 $\widehat{ABC}$  が半円のときは  $AC$  の長さを変えると  $ABC$  の面積が減少する。

証明 (i)  $\widehat{ABC}$  が優弧のとき。

系 1 により,  $\widehat{B^*A^*C}$  も優弧となる。従って,  $\text{cap}(B^*CA^*)$  の中心は  $B^*C$  の  $A^*$  側にある。この場合, (右図を参照して)  $AC$  が縮む方に  $C$  を動かすと,  $C$  は元の  $\text{cap}$  の外に移動し, 系 2 により,  $|ABC|$  は減少する。



(ii)  $\widehat{ABC}$  が半円のとき。

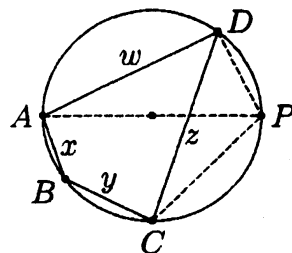
$\widehat{B^*A^*C}$  も半円で,  $B^*C$  は  $\text{cap}(B^*CA^*)$  の直径となる。故に  $B$  を中心とし  $C$  を通る円は  $\widehat{B^*CA^*}$  に接する。従って  $C$  を動かして  $AC$  の長さを変えると  $C$  は元の  $\text{cap}$  の外側に移動し,  $|ABC|$  は減少する。  $\square$

系 3.  $AB, BC$  の長さが一定で  $AB + BC < \pi$  の三角形  $ABC$  は,  $\widehat{ABC}$  が半円のとき面積が最大となる。  $\square$

系 4.  $AB, BC, CD$  の長さが一定で  $AB + BC + CD < \pi$  の凸四辺形  $ABCD$  は,  $\widehat{ABD}, \widehat{ACD}$  が共に半円の場合に, 面積が最大となる。  $\square$

等周定理 円に内接する凸四辺形は, 4 辺の長さを変えずに変形すると面積が減少する。

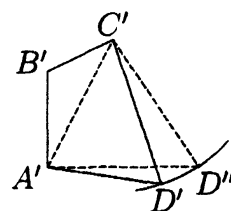
証明  $ABCD$  が円に内接するとし, 4 辺の長さを右図のように  $x, y, z, w$  とする。辺  $z$  が最大で,  $w \geq y$  と仮定せよ。  $AP$  を外接  $\text{cap}$  の直径とすると,  $AP$  は  $CD$  と交わり ( $P = C$  も可),  $w + DP < \pi$ ,  $x + y + CP < \pi$  である。3 点  $C, D, P$  と辺長  $x, y, z, w$  を固定して,  $ABCD$  を  $A'B'CD$  に変形する。すると, 系 3, 4 により,  $|A'PD| < |APD|$ ,  $|A'B'CP| < |ABCP|$  となるから,



$$\begin{aligned} |A'B'CD| &\leq |A'B'CP| + |A'DP| - |CPD| \\ &< |ABCP| + |PAD| - |CPD| = |ABCD|. \quad \square \end{aligned}$$

補題 4. 円に内接する凸四辺形  $ABCD$  において,  $AD \leq CD$  のとき,  $AB, BC, CD$  の長さは変えずに  $AD$  を縮めると,  $ABCD$  の面積が減少する。

**証明**  $AD$  の長さを縮めた凸四辺形を  $A'B'C'D'$  とする。3 点  $A', B', C'$  と  $C'D'$  の長さを固定して  $A'D'$  を元の長さに戻したものを  $A'B'C'D''$  とする。 $A'D'' = AD \leq CD = C'D''$  だから、 $\widehat{A'C'D''}$  は優弧である。従って、 $|A'C'D''| > |A'C'D'|$  で、 $|A'B'C'D''| > |A'B'C'D'|$  となる。 $A'B'C'D''$  を変形して円に内接させたものが  $ABCD$  と合同だから、等周定理により  $ABCD$  の面積は  $|A'B'C'D''|$  以上で、 $|A'B'C'D'|$  よりも大きい。  $\square$

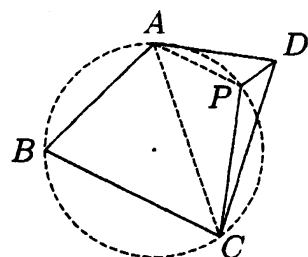


**固有対角線補題**  $AC$  を四辺形  $ABCD$  の固有対角線とする。4 辺の長さを変えずに、 $AC$  の長さを縮めると、四辺形の面積は減少する。

**証明**  $D$  が  $\text{cap}(ABC)$  の周上にあるときは、等周定理により、 $AC$  を縮めると四辺形が変形し、 $|ABCD|$  が減少する。従って、 $D$  は  $\text{cap}(ABC)$  の外部にあるとする。

(i)  $\widehat{ABC}, \widehat{ADC}$  のいずれも劣弧でないときは補題 3 により、 $AC$  を縮めると  $|ABC|, |ADC|$  のいずれも減少するから、 $|ABCD|$  が減少する。

(ii)  $\widehat{ADC}$  が劣弧のとき。点  $P$  を、三角形  $ACD$  が円  $ACB$  から切り取る弧の上の点で、 $\angle APD = \angle CPD$  となるような点とする。(このような点  $P$  は、中間値の定理により必ず存在する。)  $AP \leq CP$  とせよ。 $\angle APD$  は鈍角である。 $ABCD$  の内側に三角形  $CPD$  をつけたまま  $AC$  の長さを縮めると、 $\angle ADC$  が減少する。すると  $\angle ADP$  が減少し、従って、 $AP$  が減少する。すると  $(\widehat{ADP}$  は優弧だから)  $|ADP|$  も減少する。一方、 $AP \leq CP$  だから、 $AP$  が減少すると、補題 4 により、 $|ABCP|$  が減少する。従って、 $AC$  を縮めると、 $|ABCD|$  が減少する。  $\square$



## 参考文献

- [1] K. M. Anstreicher, The thirteen spheres: A new proof, Discrete Comput. Geom. 31(2004) 613–625.
- [2] K. Bezdek, Sphere packing revisited, European J. Combin. 27(2006) 864–883.
- [3] K. Böröczky, The Newton-Gregory problem revisited, in Discrete geometry (Ed. by A. Bezdek) 103–110, Marcel Dekker 2003, New York.
- [4] K. Böröczky, L. Szabó, Arrangement of 13 points on a sphere, in Discrete geometry (Ed. by A. Bezdek) 111–184, Marcel Dekker 2003, New York.

- [5] B. Casselman, The difficulty of kissing in three dimensions, *Notices Amer. Math. Soc.* 51(2004) 884–885.
- [6] L. Fejes Tóth, On the densest packing of spherical caps, *Amer. Math. Monthly* 56(1949) 330–331.
- [7] Wu-Yi Hsiang, Least action principle of crystal formation of dense packing type and Kepler' conjecture, World Scientific 2001.
- [8] J. Leech, The problem of thirteen spheres, *Math. Gazette* 40(1956) 22–23.
- [9] 前原潤：「円と球面の幾何学」朝倉書店 1998.
- [10] H. Maehara, Lexell's theorem via an inscribed angle theorem, *Amer. Math. Monthly* 106(1999) 352–353.
- [11] H. Maehara, Isoperimetric theorem for spherical polygons and the problem of 13 spheres, *Ryukyu Math.J.* 14(2001) 41–57.
- [12] H. Maehara, The problem of thirteen spheres – a proof for undergraduates, *European J. Combin.* in Press.
- [13] O. R. Musin, The kissing number in four dimensions, 2003, pp.1–22 (preprint).
- [14] O. R. Musin, The kissing problem in three dimensions, *Discrete Comput Geom* 35(2006) 375–384.
- [15] F. Pfender, G. M. Ziegler, Kissing numbers, sphere packings, and some unexpected proofs, *Notices Amer. Math. Soc.* 51(2004) 873–883.
- [16] K. Schütte, B. L. van der Waerden, Das Problem der dreizehn Kugeln, *Math. Ann.* 53(1953) 325–334